Städtisches
Annette-von-Droste-Hülshoff-
Gymnasium
Gelsenkirchen-Buer

Schulinterner Lehrplan zum Kernlehrplan für die gymnasiale Oberstufe im Fach Mathematik

Die Fachgruppe Mathematik am

Annette-von-Droste-Hülshoff-Gymnasium

1. Rahmenbedingung der fachlichen Arbeit

Die Lage der Schule

Das Annette-von-Droste-Hülshoff-Gymnasium liegt im Norden der Stadt Gelsenkirchen im Stadtteil Buer. Dieser im Jahre 1928 der Stadt Gelsenkirchen eingemeindete, bescheidene Stadtteil mag es nicht, als pittoresk bezeichnet zu werden, muss es sich aber gefallen lassen, dass man ihn ob seiner Lage und seiner bis ins Mittelalter zurückreichenden Stadtgeschichte als einen besonderen unter den Gelsenkirchener Stadtteilen hervorhebt. Beide der hier genannten Aspekte - der geographische und der historische - tragen dazu bei, die Voraussetzungen für den Deutschunterricht am Annette-von-Droste-Hülshoff-Gymnasium Gelsenkirchen-Buer als glücklich bezeichnen zu dürfen, berücksichtigt man die sächliche und personelle Ausstattung mag man sogar von sehr glücklichen Umständen sprechen.
Die Ambivalenz des Stadtteils Buer - der im Süden angrenzende, eher industriell geprägte „Gelsenkirchener Rest" und das sich nördlich langsam öffnende Recklinghäuser Tor ins Münsterland - schafft die Voraussetzungen für eine Unterrichtsvielfalt, die ihresgleichen sucht.

Buer selbst verfügt über diverse kulturelle Einrichtungen, die regelmäßig - und natürlich zielführend - von Schülerinnen und Schülern des AvD genutzt werden.
Der fußläufig erreichbare „geschichtsträchtige SCHAUBURG FILMPALAST" (Selbstbeschreibung des Kinos), der 1929 erbaut wurde und „seinen Besuchern die außergewöhnliche Verbindung zwischen der historisch erneuerten Umgebung und modernster Kinotechnik" bietet, veranstaltet regelmäßig unter der Überschrift „Kino für Schulen" Sondervorstellungen in Absprache mit den Schulen der Umgebung.
Ebenso fußläufig erreichbar ist die Stadtteilbibliothek Buer, die 62000 Medien ihr Eigen nennt und zudem über 3 Internetarbeitsplätze verfügt. Zahlreiche Veranstaltungen zur Förderung des Leseverhaltens stehen regelmäßig auf dem Programm; daneben bietet die Bibliothek Führungen speziell für Schulklassen an, die ebenfalls das in Vergessenheit zu geraten drohende Medium Buch wieder deutlicher ins Bewusstsein insbesondere jüngerer Leserinnen und Leser - bzw. solcher, die es werden wollen und die gibt es ja am AvD - rücken sollen. Es gibt allerdings auch eine gut

ausgestattete AvD-Schulbibliothek, die den Lesedurst (oder ist es -hunger?) der Schülerinnen und Schüler stillt.

Der über den Stadtteilrand hinausblickende AvDler stellt schnell fest, dass auch die Umgebung lohnenswerte Bezüge zu Unterrichtszielen des Faches Deutsch erlaubt. Das sprachlich-künstlerische Profil der Schule macht in Bezug auf das Fach Deutsch die Theaterpädagogik zu einem Schwerpunkt der Unterrichtsarbeit. Und abgesehen vom Theater in der Schule bietet dabei die nähere Umgebung zahlreiche Möglichkeiten, Theater in unterschiedlicher Ausprägung zu erleben. Die Schule unterhält in diesem Bereich gleich mehrere Kooperationen, unter anderem mit dem Consol-Theater und dem Musiktheater im Revier.

Neben diesen genannten Einrichtungen im engeren Sinne bieten aber auch - wie bereits eingangs erwähnt - die geographische Lage und die historische Entwicklung von Buer bzw. von Gelsenkirchen zahlreiche Bezüge zum Fach.
Zum Beispiel offenbart der industriell geprägte Teil der Stadt Gelsenkirchen - auch ihre zahlreichen, im Zuge des Strukturwandels umfunktionierten Produktionsstätten der Schwerindustrie - ein unmittelbares Bild von Urbanität, dessen literarische Verarbeitung Unterrichtsgegenstand in der Sekundarstufe I ist (Menschen in der Stadt, Jgst. 8).
Auf der anderen Seite - nördlich also - schließt sich der ländlichere Kreis Recklinghausen an und dahinter bereits steht man im Münsterland, dem Zuhause der Namensgeberin der Schule, Annette von Droste-Hülshoff. Die Werke dieser großen deutschen Dichterin haben zur Freude aller ihre Spuren im internen Curriculum des Faches Deutsch in der Sekundarstufe I hinterlassen. Die geographische Nähe zu einem Ort ihres Schaffens - Haus Rüschhaus im westfälischen Münster - wird genutzt, um den Schülerinnen und Schülern im Rahmen einer Exkursion einen ergänzenden Zugang zu Dichterin und Werk zu ermöglichen.

Das Annette-von-Droste-Hülshoff-Gymnasium liegt einerseits also inmitten eines urbanen Ballungsraumes mit einem reichhaltigen kulturellen Programm auch und gerade für Jugendliche, andererseits an einer ländlichen Schwelle der Gegenkultur.
In diesem Spannungsfeld liegt der besondere Reiz dieser Bildungseinrichtung.

Aufgaben des Faches vor dem Hintergrund der Schülerschaft

Die Schülerschaft des Annette-von-Droste-Hülshoff-Gymnasiums ist in den letzten Jahren heterogener geworden. Dies gilt weniger in Bezug auf die Herkunft der Schüler - das Gymnasium wird derzeit von 19 Schülerinnen bzw. Schülern nichtdeutscher Staatsangehörigkeit besucht - als vielmehr in Bezug auf die Fähigkeiten und Fertigkeiten der Kinder. Vor allem der schriftsprachliche Sprachgebrauch ist bei Kindern zunehmend unterschiedlich gut ausgeprägt.

Die Schule insgesamt arbeitet angesichts der wachsenden Heterogenität intensiv an Fragen der individuellen Förderung im Unterricht und außerhalb des Fachunterrichts. Dabei spielen die Erprobungsstufe und die Einführungsphase in der Oberstufe eine besondere Rolle. Es gibt fachspezifische Diagnoseverfahren zur Erhebung individueller Schwächen und diverse Maßnahmen zu ihrer Behebung wie z.B. den Förderunterricht im Fach Deutsch für alle Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I oder das Silentium, in dem die Schüler die Möglichkeit zur Erledigung ihrer Hausaufgaben haben. Die Vertiefungskurse in der Oberstufe dienen der Aufarbeitung und Angleichung von Kompetenzen, die für das Absolvieren der gymnasialen Oberstufe maßgeblich sind.

Funktionen und Aufgaben der Fachgruppe vor dem Hintergrund des Schulprogramms

In Übereinstimmung mit dem Schulprogramm des Annette-von-Droste-Hülshoff-Gymnasiums setzt sich die Fachgruppe Mathematik das Ziel, Schülerinnen und Schüler zu unterstützen, selbstständige, eigenverantwortliche, selbstbewusste, sozial kompetente und engagierte Persönlichkeiten zu werden (und schlaue noch dazu). In der Sekundarstufe II sollen die Schülerinnen und Schüler darüber hinaus auf die zukünftigen Herausforderungen in Studium und Beruf vorbereitet werden.

Beitrag der Fachgruppe zur Erreichung der Erziehungsziele der Schule

Verfügbare Ressourcen

2 Entscheidungen zum Unterricht

2.1 Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Schülerinnen und Schülern Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

Im „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.1) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Sie ist laut Beschluss der Fachkonferenz verbindlich für die Unterrichtsvorhaben I, II und III der Einführungsphase und für die Unterrichtsphasen der Qualifikationsphase. Die zeitliche Abfolge der Unterrichtsvorhaben IV bis VIII der Einführungsphase ist jeweils auf die Vorgaben zur Vergleichsklausur abzustimmen.

Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen“ an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkretisierter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zum „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten soll, besitzt die Ausweisung „konkretisierter Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.2) empfehlenden Charakter. Referendarinnen und Referendaren sowie neuen Kolleginnen und Kollegen dienen diese vor allem zur standardbezogenen Orientierung in der neuen Schule, aber auch zur Verdeutlichung von unterrichtsbezogenen fachgruppeninternen Absprachen zu didaktisch-methodischen Zugängen, fächerübergreifenden Kooperationen, Lernmitteln und -orten sowie vorgesehenen Leistungsüberprüfungen, die im Einzelnen auch den Kapiteln 2.2 bis 2.4 zu entnehmen sind. Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

<table>
<tr><th colspan="2">Einführungsphase</th></tr>
<tr>
<td><u>Unterrichtsvorhaben I:</u>

Thema:
Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen (Wiederholung und Symmetrie, Nullstellen, Transformation) (E-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Kommunizieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundlegende Eigenschaften von Potenz- und Sinusfunktionen

Zeitbedarf: 16 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben II:</u>

Thema:
Die Ableitung, ein Schlüsselkonzept (Änderungsrate, Ableitung, Tangente) (E-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Kommunizieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
• Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

Zeitbedarf: 13 Std.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td><u>Unterrichtsvorhaben III:</u>

Thema:
Funktionsuntersuchungen (Charakteristische Punkte, Monotonie, Extrema) (E-A3)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Modellieren

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

Zeitbedarf: 13 Std.</td>
<td><u>Unterrichtsvorhaben IV:</u>

Thema:
Vektoren, ein Schlüsselkonzept (Punkte, Vektoren, Rechnen mit Vektoren, Betrag) (E-G1)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Kommunizieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Koordinatisiereungen des Raumes
• Vektoren und Vektoroperationen

Zeitbedarf: 15 Std.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Einführungsphase Fortsetzung</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben V:</u>

Thema:
Wahrscheinlichkeit, ein Schlüsselkonzept (Erwartungswert, Pfadregel, Vierfeldertafel, bedingte Wahrscheinlichkeit) (E-S1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Mehrstufige Zufallsexperimente
• Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Zeitbedarf: 15 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben VI:</u>

Thema:
Potenzen in Termen und Funktionen (rationale Exponenten, Exponentialfunktionen, Wachstumsmodelle) (E-A4)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Grundlegende Eigenschaften von Exponentialfunktionen

Zeitbedarf: 12 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Summe Einführungsphase: 84 Stunden</u></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS/LEISTUNGSKURS</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-I:</u>

Thema:
Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter) (Q-A1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld:
Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung
• Funktionen als mathematische Modelle

Zeitbedarf: GK 29 Std. – LK 30 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-II :</u>

Thema:
Das Integral – Ein Schlüsselkonzept (Von der Änderungsrate zum Bestand, Integral und Flächeninhalt, Integralfunktion) (Q-A2)

Zentrale Kompetenzen:
• Kommunizieren
• Argumentieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfelder:
Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
• Grundverständnis des Integralbegriffs
• Integralrechnung

Zeitbedarf: GK 21 Std. – LK 31 Std.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-III:</u>

Thema: Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-A3)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Fortführung der Differentialrechnung

Zeitbedarf: GK 15 Std. – LK 26 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-IV:</u>

Thema: Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produkt- und Kettenregel) (Q-A4)

Zentrale Kompetenzen:
• Argumentieren
• Modellieren
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
• Funktionen als mathematische Modelle
• Fortführung der Differentialrechnung
• Integralrechnung

Zeitbedarf: GK 16 Std. – LK 33 Std.</td></tr>
</table>

Qualifikationsphase (Q1) – Fortsetzung	
Unterrichtsvorhaben Q1-V: **Thema:** *Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen und Schattenwurf) (Q-G1)* **Zentrale Kompetenzen**: • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden) • Skalarprodukt **Zeitbedarf:** GK = LK 20 Std.	*Unterrichtsvorhaben Q1-VI (nur LK):* **Thema***: Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte) (Q-G2)* **Zentrale Kompetenzen**: • Argumentieren • Kommunizieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen) • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf:** LK 19 Std.
Summe Qualifikationsphase (Q1) – GRUNDKURS 101 Std./ LEISTUNGSKURS 159 Std.	

Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS/LEISTUNGSKURS	
<u>*Unterrichtsvorhaben Q2-I (nur GK):*</u> **Thema*:*** *Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte) (Q-G2)* **Zentrale Kompetenzen**: • Argumentieren • Kommunizieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen) • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf:** GK 18 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben Q2-I (nur LK):*</u> **Thema:** *Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q-G4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Lagebeziehungen und Abstände (von Geraden) • Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf:** LK 25 Std.

<u>*Unterrichtsvorhaben Q2-II:*</u> **Thema:** *Wahrscheinlichkeit – Statistik: Ein Schlüsselkonzept (Q-S1)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Werkzeuge nutzen • Problemlösen **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen • Binomialverteilung **Zeitbedarf:** GK 22 Std. – LK 24 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben Q2-III (nur LK):*</u> **Thema:** *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-S2)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Testen von Hypothesen **Zeitbedarf:** LK 16 Std.

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q2) - Fortsetzung</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-IV (nur LK):</u>

Thema: Ist die Glocke normal? (Q-S3)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Normalverteilung

Zeitbedarf: LK 15 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-V:</u>

Thema: Von Übergängen und Prozessen (Q-S4)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Stochastische Prozesse

Zeitbedarf: GK 12 Std. – LK 14 Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Summe Qualifikationsphase (Q2) – GRUNDKURS: 52 Std./ LEISTUNGSKURS: 94 Std.</td></tr>
</table>

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	E-A1	16
II	E-A2	13
III	E-A3	13
IV	E-G1	15
V	E-S1	15
VI	E-A4	12
	Summe:	84
Q1 Grundkurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-A1	29
II	Q-A2	21
III	Q-A3	15
IV	Q-A4	16
V	Q-G1	20
	Summe:	101
Q2 Grundkurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-G2	18
II	Q-S1	22
III	Q-S4	12
	Summe:	52
Q1 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-A1	30
II	Q-A2	31
III	Q-A3	26
IV	Q-A4	33
V	Q-G1	20
VI	Q-G2	19
	Summe:	159
Q2 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-G3	25
II	Q-S1	24
III	Q-S2	16
IV	Q-S3	15
V	Q-S4	14
	Summe:	94

2.1.2 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Vorhabenbezogene Konkretisierung:

Einführungsphase Funktionen und Analysis (A)

Thema: *Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen (Wiederholung und Symmetrie, Nullstellen, Transformation) (E-A1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Lambacher Schweizer**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten sowie quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen • wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen (Sinusfunktion, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen) an und deuten die zugehörigen Parameter • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von innermathematischen Problemen • lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen	**Kapitel I Funktionen** 1 Funktionen 2 Lineare und quadratische Funktionen 3 Potenzfunktionen 4 Ganzrationale Funktionen 5 Symmetrie von Funktionsgraphen 6 Nullstellen ganzrationaler Funktionen 7 Verschieben und Strecken von Graphen **Exkursion** Polynomdivision und Linearfaktorzerlegung	Algebraische Rechentechniken werden grundsätzlich parallel vermittelt und diagnosegestützt geübt (solange in diesem Unterrichtsvorhaben erforderlich, z.B. durch „Fit für die Oberstufe“ aus dem 9er Mathematikbuch ergänzt durch differenzierende, individuelle Zusatzangebote aus Aufgabensammlungen). Dem oft erhöhten Angleichungs- und Förderbedarf von Schulformwechslern wird ebenfalls durch gezielte individuelle Angebote Rechnung getragen. *Hilfreich kann es sein, dabei die Kompetenzen der Mitschülerinnen und Mitschüler (z. B. durch Kurzvorträge) zu nutzen.* Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung in die elementaren Bedienkompetenzen der verwendeten Software und des GTR gerichtet werden. Anknüpfend an die Erfahrungen aus der SI werden quadratische Funktionen (Scheitelpunktform) und Parabeln unter dem Transformationsaspekt betrachtet. Systematisches Erkunden mithilfe des GTR eröffnet den Zugang zu Potenzfunktionen, ganzrationalen Funktionen und zur Sinusfunktion. Kontexte spielen in diesem Unterrichtsvorhaben eine untergeordnete Rolle. Quadratische Funktionen können aber stets als

(Lösen) • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf und unterstützen diese beispielgebunden *(Vermuten)* • erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren *(Rezipieren)* • erläutern mathematische Fachbegriffe in theoretischen Zusammenhängen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(*Produzieren*)* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet Stellung *(Diskutieren)* • beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* • führen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen Entscheidungen herbei *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Tabellenkalkulation, Funktionenplotter und grafikfähige Taschenrechner • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … Lösen von Gleichungen		Weg-Zeit-Funktion bei Fall- und Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet werden. *Die Motivation zur Beschäftigung mit Polynomfunktionen soll durch eine Optimierungsaufgabe geweckt werden. Die verschiedenen Möglichkeiten, eine Schachtel aus einem DIN-A4-Blatt herzustellen, führen insbesondere auf Polynomfunktionen vom Grad 3. Hier können sich alle bislang erarbeiteten Regeln bewähren.* Ganzrationale Funktionen vom Grad 3 werden Gegenstand einer qualitativen Erkundung mit dem GTR, wobei Parameter gezielt variiert werden. Zusätzlich werden die Symmetrie zum Ursprung und das Globalverhalten untersucht. Die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert.

Thema: *Die Ableitung, ein Schlüsselkonzept (Änderungsrate, Ableitung, Tangente) (E-A2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • berechnen durchschnittliche und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Kontext • erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate • deuten die Tangente als Grenzlage einer Folge von Sekanten • deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/ Tangentensteigung • beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) • leiten Funktionen graphisch ab • nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten • wenden die Summen- und Faktorregel auf ganzrationale Funktionen an • nennen die Kosinusfunktion als Ableitung der Sinusfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • übersetzen Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells *(Mathematisieren)*	**Kapitel II Abhängigkeiten und Änderungen - Ableitung** 1 Mittlere Änderungsrate – Differenzenquotient 2 Momentane Änderungsrate 3 Die Ableitung an einer bestimmten Stelle berechnen 4 Die Ableitungsfunktion 5 Ableitungsregeln 6 Tangente 7 Ableitung der Sinusfunktion	*Für den Einstieg wird ein Stationenlernen zu durchschnittlichen Änderungsraten in unterschiedlichen Sachzusammenhängen empfohlen, die auch im weiteren Verlauf immer wieder auftauchen (z. B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, Temperaturmessung, Aktienkurse, Entwicklung regenerativer Energien, Sonntagsfrage, Wirk- oder Schadstoffkonzentration, Wachstum, Kosten- und Ertragsentwicklung).* Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird im Sinne eines spiraligen Curriculums qualitativ und heuristisch verwendet. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät ermittelten Momentangeschwindigkeit genutzt. Neben zeitabhängigen Vorgängen kann auch ein geometrischer Kontext betrachtet werden. Dynamische-Geometrie-Software kann zur geometrischen Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekanten zur Tangenten (Zoomen) eingesetzt werden. Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden. Hier ist auch der Ort, den Begriff des Extrempunktes (lokal vs. global) zu präzisieren, während eine Untersuchung der Änderung von Änderungen erst zu einem späteren Zeitpunkt des Un-

• überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • reflektieren die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • überprüfen Ergebnisse, Begriffe und Regeln auf Verallgemeinbarkeit *(Beurteilen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet Stellung *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler*		terrichts (Q1) vorgesehen ist. Es wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für eine quadratische Funktion wird der Grenzübergang bei der „h-Methode“ exemplarisch durchgeführt. *Empfehlung: Durch Variation im Rahmen eines Gruppenpuzzles vermuten die Lernenden eine Formel für die Ableitung einer beliebigen quadratischen Funktion. Dabei vermuten sie auch das Grundprinzip der Linearität (ggf. auch des Verhaltens bei Verschiebungen in x-Richtung). Durch Analyse des Rechenweges werden die Vermutungen erhärtet.* Um die Ableitungsregel für höhere Potenzen zu vermuten, nutzen die Schüler den GTR und die Möglichkeit, Werte der Ableitungsfunktionen näherungsweise zu tabellieren und zu plotten. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Vermutens. Durch gleichzeitiges Visualisieren der Ableitungsfunktion erklären Lernende die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen 3. Grades durch die Eigenschaften der ihnen vertrauten quadratischen Funktionen. Zugleich entdecken sie die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten, woran in Unterrichtsvorhaben III (Thema E-A3) angeknüpft wird. Beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen können auch Tangentengleichungen bestimmt werden. *Ein kurzes Wiederaufgreifen des graphischen Ableitens am Beispiel der Sinusfunktion führt zur Entdeckung, dass die Kosinusfunktion deren Ableitung ist.*

• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … zielgerichteten Variieren von Parametern … grafischen Messen von Steigungen … Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Berechnen und Darstellen von Funktionen		

Thema: *Funktionsuntersuchungen (Charakteristische Punkte, Monotonie, Extrema) (E-A3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben Eigenschaften eines Funktionsgraphen • begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe der Graphen der Ableitungsfunktionen • unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich • verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von außermathematischen Problemen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler*	**Kapitel III Eigenschaften von Funktionen** 1 Charakteristische Punkte eines Funktionsgraphen 2 Monotonie 3 Hoch- und Tiefpunkte 4 Mathematische Fachbegriffe in Sachzusammenhängen **Exkursion** Extremstellen mithilfe der zweiten Ableitung bestimmen	Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der vier möglichen Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen zu argumentieren. Die Untersuchungen auf Symmetrien und Globalverhalten werden fortgesetzt. Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren ohne Verwendung des GTR gegeben. *Der logische Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Kriterien kann durch Aufgaben vertieft werden, die rund um die Thematik der Funktionsuntersuchung von Polynomfunktionen Begründungsanlässe und die Möglichkeit der Einübung zentraler Begriffe bieten.* Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms argumentieren. So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse.

• erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)* • überprüfen Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* • vergleichen verschiedene Lösungswege *(Reflektieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf und präzisieren sie mithilfe von Fachbegriffen *(Vermuten)* • nutzen math. Regeln und Sätze für Begründungen *(Begründen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren *(Rezipieren)* • erläutern math. Begriffe in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Funktionen (graphisch und als Wertetabelle)		

Thema: *Potenzen in Termen und Funktionen (rationale Exponenten, Exponentialfunktionen, Wachstumsmodelle) (E-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • wenden einfache Transformationen (Streckung, Verschiebung) auf Funktionen Exponentialfunktionen an und deuten die zugehörigen Parameter • beschreiben Wachstumsprozesse mithilfe linearer Funktionen und Exponentialfunktionen • verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe math. Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des math. Modells *(Mathematisieren)* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)* • *beziehen* die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*	**Kapitel VI Potenzen in Termen und Funktionen** 1 Potenzen mit rationalem Exponenten 2 Exponentialfunktionen 3 Exponentialgleichungen und Logarithmus 4 Lineare und exponentielle Wachstumsmodelle **Exkursion** Logarithmusgesetze	Als Kontext für die Beschäftigung mit Wachstumsprozessen können zunächst Ansparmodelle (insbesondere lineare und exponentielle) betrachtet und mithilfe einer Tabellenkalkulation verglichen werden. Für kontinuierliche Prozesse und den Übergang zu Exponentialfunktionen werden verschiedene Kontexte (z. B. Bakterienwachstum, Abkühlung) untersucht.

• *reflektieren* die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • *verbessern* aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • setzen *ausgewählte* Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • überprüfen Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung und auf Plausibilität *(Reflektieren)* • vergleichen verschiedene Lösungswege *(Reflektieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf und präzisieren sie mithilfe von Fachbegriffen *(Vermuten)* • erklären vorgegebene Argumentationen und Beweise *(Begründen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen begründet Stellung *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum *… Darstellen von Funktionen (grafisch und als Wertetabelle)* *… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen* *… zum Lösen von Gleichungen*		

Einführungsphase Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

<table>
<tr><td colspan="3">Thema: Vektoren, ein Schlüsselkonzept (Punkte, Vektoren, Rechnen mit Vektoren, Betrag) (E-G1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Lambacher Schweizer</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum
• stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar
• deuten Vektoren (in Koordinatendarstellung) als Verschiebungen und kennzeichnen Punkte im Raum durch Ortsvektoren
• stellen gerichtete Größen (z. B. Geschwindigkeit, Kraft) durch Vektoren dar
• berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras
• addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität
• weisen Eigenschaften von besonderen Dreiecken und Vierecken mithilfe von Vektoren nach

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• übersetzen Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertig-</td><td>Kapitel IV Vektoren
1 Punkte im Raum
2 Vektoren
3 Rechnen mit Vektoren
4 Betrag eines Vektors – Länge einer Strecke
5 Figuren und Körper untersuchen
Exkursion Mit dem Auto in die Kurve – Vektoren in Aktion</td><td>Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z. B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (GPS, geographische Koordinaten, kartesische Koordinaten, Robotersteuerung). Ein Einstieg kann über den Kontext der Spidercam erfolgen.

An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z. B. „unvollständigen“ Holzquadern) lernen die Schülerinnen und Schüler, ohne Verwendung einer DGS zwischen (verschiedenen) Schrägbildern einerseits und der Kombination aus Grund-, Auf- und Seitenriss andererseits zu wechseln, um ihr räumliches Vorstellungsvermögen zu entwickeln.
Neben anderen Kontexten kann auch hier die Spidercam verwendet werden, und zwar um Kräfte und ihre Addition in Anlehnung an die Kenntnisse aus dem Physikunterricht der SI als Beispiel für vektorielle Größen zu nutzen.

Durch Operieren mit Verschiebungspfeilen werden einfache geometrische Problemstellungen gelöst: Beschreibung von Diagonalen (insbesondere zur Charakterisierung von Viereckstypen), Auffinden von Mittelpunkten (ggf. auch Schwerpunkten), Untersuchung auf Parallelität.</td></tr>
</table>

keiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (*Mathematisieren*) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (*Validieren*) ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf, unterstützen diese beispielgebunden und präzisieren sie mithilfe von Fachbegriffen *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Ober- und Unterbegriffen her *(Begründen)* • nutzen math. Regeln und Sätze für Begründungen *(Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)* • nutzen verschiedene Argumentationsstrategien *(Begründen)* • erkennen und ergänzen bzw. korrigieren lückenhafte und fehlerhafte Argumentationsketten *(Beurteilen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern mathematische Begriffe in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)*		

• verwenden Fachsprache und fachspezifische Notation *(Produzieren)* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet Stellung *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* nutzen digitale Werkzeuge zum … Darstellen von Objekten im Raum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren und Vektorsummen … Durchführen von Operationen mit Vektoren		

Einführungsphase Stochastik (S)

Thema: *Wahrscheinlichkeit, ein Schlüsselkonzept (Erwartungswert, Pfadregel, Vierfeldertafel, bedingte Wahrscheinlichkeit) (E-S1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente • simulieren Zufallsexperimente • verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen • stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch • beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Pfadregeln • modellieren Sachverhalte mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vier-oder Mehrfeldertafeln • bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten • prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit • bearbeiten Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten. **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragstellung *(Strukturieren)*	**Kapitel V Wahrscheinlichkeit** 1 Wahrscheinlichkeitsverteilung – Erwartungswert 2 Mehrstufige Zufallsexperimente, Pfadregel 3 Vierfeldertafel, bedingte Wahrscheinlichkeiten 4 Stochastische Unabhängigkeit **Exkursion** Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Lernen aus Erfahrung – die Bayes'sche Regel	Beim Einstieg bieten sich Beispiele aus dem Bereich Glücksspiele an.. Beispiele aus anderen Kontexten sollten auch Berücksichtigung finden. Zur Modellierung von Wirklichkeit werden durchgängig Simulationen – auch unter Verwendung von digitalen Werkzeugen (GTR, Tabellenkalkulation) – geplant und durchgeführt (Zufallsgenerator). Das Urnenmodell wird auch verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren. *Die zentralen Begriffe Wahrscheinlichkeitsverteilung und Erwartungswert werden im Kontext von Glücksspielen erarbeitet und können durch zunehmende Komplexität der Spielsituationen vertieft werden.* Digitale Werkzeuge werden zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung von händischem Rechnen verwendet. *Als Einstiegskontext zur Erarbeitung des fachlichen Inhaltes zu den bedingten Wahrscheinlichkeiten könnte das HIV-Testverfahren dienen, eine Möglichkeit zur Vertiefung böte dann die Betrachtung eines Diagnosetests zu einer häufiger auftretenden Erkrankung (z. B. Grippe).*

• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedne passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • finden und stellenFragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Situation *(Erkunden)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • überprüfen Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung und auf Plausibilität *(Reflektieren)* • vergleichen verschiedene Lösungswege *(Reflektieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf und präzisieren diese mithilfe von Fachbegriffen *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln und Sätze für Begründungen *(Begründen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler*		Um die Übertragbarkeit des Verfahrens zu sichern, sollen insgesamt mindestens zwei Beispiele aus unterschiedlichen Kontexten betrachtet werden. Zur Förderung des Verständnisses der Wahrscheinlichkeitsaussagen werden parallel Darstellungen mit absoluten Häufigkeiten verwendet. Die Schülerinnen und Schüler sollen zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Baumdiagramm, Mehrfeldertafel) wechseln können und diese zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung und zum Rückschluss auf unbekannte Astwahrscheinlichkeiten nutzen können. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung.

• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Erstellen der Histogramme von Wahrscheinlichkeitsvertei- lungen … Ermitteln der Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsvertei- lungen (Erwartungswert)		

Q-Phase Grundkurs/Leistungskurs Funktionen und Analysis (A)

Thema: *Eigenschaften von Funktionen (Höhere Ableitungen, besondere Punkte von Funktionsgraphen, Funktionen bestimmen, Parameter) (Q-A1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext • untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen	**Kapitel I: Eigenschaften von Funktionen** 1 Wiederholung: Ableitung 2 Die Bedeutung der zweiten Ableitung 3 Kriterien für Extremalstellen 4 Kriterien für Wendestellen 5 Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen 6 Ganzrationale Funktionen bestimmen 7 Funktionen mit Parametern 8 Funktionenscharen untersuchen	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege zu entwickeln. An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) wird unter dem

einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedingung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen)*		Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkten, Symmetrieüberlegungen, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. *Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser" zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.* Über freie Parameter (aus unterbestimmten Gleichungssystemen) werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen „Steckbriefen" werden Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht.

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … grafischen Messung von Steigungen … Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle		

Thema: *Das Integral, ein Schlüsselkonzept (Von der Änderungsrate zum Bestand, Integral und Flächeninhalt, Integralfunktion) (Q-A2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion • begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion • bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen • bestimmen Integrale […] mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen und numerisch (GK: auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge) • erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und	**Kapitel II Schlüsselkonzept: Integral** 1 Rekonstruieren einer Größe 2 Das Integral 3 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 4 Bestimmung von Stammfunktionen 5 Integral und Flächeninhalt 6 Integralfunktion 7 Unbegrenzte Flächen – Uneigentliche Integrale Wahlthema: Mittelwert 8 Integral und Rauminhalt	Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt werden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit - Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Konstruktion einer Größe (z. B. physikalische Arbeit) erforderlich, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt. Der Einstieg kann über eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. *Falls die Lernenden entdecken, welche Auswirkungen dieser Umkehrprozess auf die Funktionsgleichung der „Bilanzfunktion“ hat, kann dies zur Überleitung in das folgende Unterrichtsvorhaben genutzt werden.* Schülerinnen und Schüler sollen hier selbst entdecken, dass die Integralfunktion J_a eine Stammfunktion der Randfunktion ist.

Integralfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/ Unterbegriff) *(Begründen)* • erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren *(Rezipieren)* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)*		Dazu wird das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben entwickelte numerische Näherungsverfahren zur Rekonstruktion einer Größe aus der Änderungsrate auf eine kontextfrei durch einen Term gegebene Funktion angewendet und zur Konstruktion der Integralfunktion genutzt (Verallgemeinerung). Die Graphen der Randfunktion und der genäherten Integralfunktion können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Um diesen Zusammenhang zu begründen, wird der absolute Zuwachs $J_a(x+h) - J_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren, und motiviert, die Voraussetzungen zu präzisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. *Hier bieten sich Möglichkeiten zur inneren Differenzierung: Formalisierung der Schreibweise bei der Summenbildung, exemplarische Einschachtelung mit Ober- und Untersummen, formale Grenzwertbetrachtung, Vergleich der Genauigkeit unterschiedlicher Abschätzungen.* In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Produktsummen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Volumina wird stark auf Analogien zur Flächenberechnung verwiesen. (Gedanklich wird mit einem „Eierschneider“ der Rotationskörper in berechenbare Zylinder zer-

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen […] digitale Werkzeuge *[Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter]* zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals		legt, analog den Rechtecken oder Trapezen bei der Flächenberechnung. Auch die jeweiligen Summenformeln weisen Entsprechungen auf.) Mit der Mittelwertberechnung kann bei entsprechend zur Verfügung stehender Zeit (über den Kernlehrplan hinausgehend) noch eine weitere wichtige Grundvorstellung des Integrals erarbeitet werden.

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus (Q-A3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen • bilden die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion • beschreiben und begründen die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion • deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen • bilden die Ableitung von Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen und deren Ableitung • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze • verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion • bilden die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*	**Kapitel III Exponentialfunktionen** 1 Wiederholung 2 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung 3 Natürlicher Logarithmus – Ableitung von Exponentialfunktionen 4 Exponentialfunktionen und exponentielles Wachstum 5 Beschränktes Wachstum 6 Logarithmusfunktion und Umkehrfunktion	*Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens empfiehlt sich eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte in Gruppenarbeit mit Präsentation (Wachstum und Zerfall).* Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Eulersche Zahl kann z. B. über das Problem der stetigen Verzinsung. eingeführt werden. Der Grenzübergang wird dabei zunächst durch den GTR unterstützt. Da der Rechner dabei numerisch an seine Grenzen stößt, wird aber auch eine Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motiviert. Die Frage nach der Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt wird zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle gesucht. *Dazu kann man eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die immer weiter verfeinert wird. Oder man experimentiert in der Grafik des GTR, indem Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion gelegt werden. Mit diesem Ansatz kann in einem DGS auch der Graph der Ableitungsfunktion als Ortskurve gewonnen werden.* Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich automatisch, dass für die Eulersche Zahl als Basis Funktion und

• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • recherchieren Informationen *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • setzen ausgewählte Routinefragen auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln und Sätze für Begründungen *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* • beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertragbarkeit *(Beurteilen)*		Ableitungsfunktion übereinstimmen. Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen. Mit Hilfe der schon bekannten Kettenregel können dann auch allgemeine Exponentialfunktionen abgeleitet werden. *Eine Vermutung zur Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird graphisch geometrisch mit einem DGS als Ortskurve gewonnen und anschließend mit der Kettenregel bewiesen.*

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Erkunden … Darstellen von Funktionen grafisch und als Wertetabelle … grafischen Messen von Steigungen … Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge		

Thema: *Untersuchung zusammengesetzter Funktionen (Produktregel, Kettenregel) (Q-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) • wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an • wenden die Produktregel zum Ableiten von Funktionen an • wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an • bilden die Ableitungen von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten • bilden die Ableitungen von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten • wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • untersuchen den Einfluss von Parametern auf Eigenschaften von Funktionenscharen • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext • führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück • nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: x → 1/x **Prozessbezogene Kompetenzen:**	**Kapitel IV Zusammengesetzte Funktionen** 1 Neue Funktionen aus alten Funktionen: Summe, Produkt, Verkettung 2 Produktregel 3 Kettenregel 4 Zusammengesetzte Funktionen untersuchen 5 Zusammengesetzte Funktionen im Sachzusammenhang 6 Untersuchung von zusammengesetzten Exponentialfunktionen 7 Untersuchung von zusammengesetzten Logarithmusfunktionen **Wahlthema** Integrationsverfahren	Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion wird eine Kettenlinie modelliert. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang wird die Produktregel zum Ableiten eingeführt. In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert. Als Beispiel für eine Summenfunktion eignet sich die Modellierung einer Kettenlinie. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu-

Problemlösen *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen heuristische Strategien *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln und Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)* • erkennen lückenhafte Argumentationsketten und vervollständigen sie *(Beurteilen)* • erkennen fehlerhafte Argumentationsketten und korrigieren sie *(Beurteilen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • verwenden Fachsprache und fachspezifische Notation *(Produzieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum		und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet. Auch in diesen Kontexten ergeben sich Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen.

… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … grafischen Messen von Steigungen … Berechnen der Ableitung einer Funktion an einer Stelle • reflektieren und begründen Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge		

Q-Phase Grundkurs/Leistungskurs Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Thema: *Geraden und Skalarprodukt (Bewegungen und Schattenwurf)(Q-G1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Geraden in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen • untersuchen die Lagebeziehungen zwischen Geraden • berechnen Schnittpunkte von Geraden und deuten sie im Sachkontext • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*	**Kapitel V Geraden** 1 *Wiederholung:* Punkte *im Raum, Vektoren, Rechnen mit Vektoren* 2 Geraden 3 Gegenseitige Lage von Geraden 4 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt 5 Winkel zwischen Vektoren - Skalarprodukt	Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (hier die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Strahlen und Strecken einbezogen. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen erlauben die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen. Solche Darstellungen sollten geübt werden. Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet die zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behand-

• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden … Darstellen von Objekten im Raum		lung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an. Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt. Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produktes von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z. B. Division durch einen Vektor) gestellt. Anknüpfend an das Thema E-G2 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarproduktes untersucht. Dabei bieten sich vorrangig Problemlöseaufgaben (z. B. Nachweis von Viereckstypen) an. *Ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt kann im Einzelfall dahinterliegende Sätze transparent machen wie z. B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen* $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ *und* $(\vec{a})^2=(\vec{b})^2$ *für die Seitenvektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *eines Parallelogramms.* In Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung bietet sich an. GK: Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bie-

		ten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden. *Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen (anknüpfend an das Thema E-G2) wieder aufgenommen werden.* Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.

Thema: *Ebenen als Lösungsmengen linearer Gleichungen (Untersuchung geometrischer Objekte) (Q-G2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind, an • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen • stellen Ebenen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)*	**Kapitel VI Ebenen** 1 Das Gauß-Verfahren 2 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme 3 Ebenen im Raum - Parameterform 4 Lagebeziehungen 5 Geometrische Objekte und Situationen im Raum	Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen. *Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.* In diesem Unterrichtsvorhaben werden Problemlösekompetenzen erworben, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege vergleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem. Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-A2) mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren.

• verwenden heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...]Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus (*Lösen)* • *vergleichen* verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)*		Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

• erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum… …Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen …Darstellen von Objekten im Raum		

Thema: *Abstände und Winkel (Q-G3) (nur LK)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Ebenen in Koordinatenform dar • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*	**Kapitel VII Abstände und Winkel** 1 Normalengleichung und Koordinatengleichung 2 Lagebeziehungen 3 Abstand zu einer Ebene 4 Abstand eines Punktes von einer Geraden 5 Abstand windschiefer Geraden 6 Schnittwinkel **Wahlthema** Vektorprodukt	Die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden ist eingebettet in die Untersuchung von Lagebeziehungen. Die Existenzfrage führt zur Unterscheidung der vier möglichen Lagebeziehungen. Als ein Kontext kann die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Thema Q-LK-G1 wieder aufgenommen werden, insbesondere mit dem Ziel, die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten im Unterschied zur Abstandsberechnung zwischen den Flugbahnen zu vertiefen. Hier bietet sich wiederum eine Vernetzung mit den Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung an. Die Berechnung des Abstandes zweier Flugbahnen kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nachträglich aus dem Abstand bestimmt werden müssen. In der Rückschau sollten die Schüler nun einen Algorithmus entwickeln, um über die Lagebeziehung zweier Geraden zu entscheiden. Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Die Schülerinnen und Schüler können selbst solche Darstellungen entwickeln, z.B. auf Lernplakaten dokumentieren, präsentieren, vergleichen und in ihrer Brauchbarkeit beurteilen. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollten nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fach-

• beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … Darstellen von Objekten im Raum ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)*		sprache angeregt werden. Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an Q-G1 anknüpfender Weg vorgeschlagen: Betrachtet wird die Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen ($\vec{a} = 0$) wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform als Sonderformen der Normalenform) können z.B. in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt, verglichen und in Beziehung gesetzt werden. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Zur Veranschaulichung der Lage von Ebenen kann eine räumliche Geometriesoftware verwendet werden. *Vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) kann bei genügend zur Verfügung stehender Zeit die Lösungsmenge eines Systems von Koordinatengleichungen als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden. Dabei wird die Matrix-Vektor-Schreibweise genutzt. Dies bietet weitere Möglichkeiten, bekannte mathematische Sachverhalte zu vernetzen. Die Auseinandersetzung mit der Linearen Algebra wird in Q-LK-G4 weiter vertieft.* Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden

		Parallelogramme und Dreiecke beschrieben. So können auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden. Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines Gleichungssystems bestimmt.

Q-Phase Grundkurs/Leistungskurs Stochastik (S)

Thema: *Wahrscheinlichkeit – Statistik: Ein Schlüsselkonzept (Q-S1)*		
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Lambacher Schweizer**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • erklären die Binomialverteilung einschließlich der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen • nutzen die σ-Regeln für prognostische Aussagen • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen	**Kapitel VIII Wahrscheinlichkeit – Statistik** 1 Daten darstellen und durch Kenngrößen beschreiben 2 Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen 3 Bernoulli-Experimente, Binomialverteilung 4 Praxis der Binomialverteilung 5 Problemlösen mit der Binomialverteilung **Wahlthema** Von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen kann durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert werden. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; über gezielte Veränderungen der Verteilung wird ein Gefühl für die Auswirkung auf deren Kenngrößen entwickelt. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt. Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in

Prozessbezogene Kompetenzen: ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf konkrete Fragestellungen *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten … Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen … Variieren der Parameter von Binomialverteilungen … Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)		Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und der Binomialkoeffizienten können sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation und die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests anbieten. Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.* Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung induktiv entdeckt werden: In einer Tabellenkalkulation wird bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren

Problemlösen *Die Schülerinnen und Schüler* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) *(Lösen)* • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)*		von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen.. GK: Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von *n* und *p* ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen. GK: *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.*

Thema: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-S2) (nur LK)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse • beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* • überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen *(Reflektieren)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Frage-	**Kapitel VIII Wahrscheinlichkeit – Statistik (Fortsetzung)** 6 Zweiseitiger Signifikanztest 7 Einseitiger Signifikanztest 8 Fehler beim Testen von Hypothesen 9 Signifikanz und Relevanz **Exkursion** Schriftbildanalyse	Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten. Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert: - Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? - Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet.

stellung *(Reflektieren)* • variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen, vervollständigen und korrigieren lückenhafte Argumentationsketten *(Beurteilen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* • beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihrer Reichweite und Übertragbarkeit *(Beurteilen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung *(Diskutieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)*		

Thema: *Ist die Glocke normal? (Q-S3) (nur LK)*		
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Lambacher Schweizer**	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion • untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen • beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gaußsche Glockenkurve) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren [...] komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen [...] komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsi-	**Kapitel IX Stetige Zufallsgrößen – Normalverteilung** 1 Stetige Zufallsgrößen: Integrale besuchen die Stochastik 2 Die Analyse der Gauß'schen Glockenfunktion 3 Normalverteilung, Satz von de Moivre-Laplace **Wahlthema** Testen bei der Normalverteilung **Exkursion** Doping mit Energy-Drinks	Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Der Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben kann über die Untersuchung von Summenverteilungen erfolgen. Mit einer Tabellenkalkulation werden die Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln simuliert, wobei in der grafischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. *Ergänzung für leistungsfähige Kurse:* Gut geeignet ist auch die Simulation von Stichprobenmittelwerten aus einer (gleichverteilten) Grundgesamtheit. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang. Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. Q-LK-A3). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR.

tuation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung *(Diskutieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen • nutzen digitale Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge, wählen sie gezielt aus und nutzen sie zum Erkunden …, Berechnen und Darstellen • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge		Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann.

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (Q-S4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Lambacher Schweizer	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren) • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*	**Kapitel X Stochastische Prozesse** 1 Stochastische Prozesse 2 Stochastische Matrizen 3 Matrizen multilizieren 4 Potenzen von Matrizen – Grenzverhalten **Wahlthema** Mittelwertsregeln	*Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an. Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt. GK: In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Mög-

• stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • analysieren und strukturieren eine gegebene Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge		lichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt: - die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment - die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette - die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße - die Unabhängigkeit der Ergebnisse - die Benennung von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen. *Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden.* *Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.*